МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
Теории функций и геометрии
Семёнов Е.М.

30.06.2020 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.03.02 Теория экстремальных задач

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

01.05.01 Фундаментальные математика и механика

2. Профиль подготовки/специализация: Современные методы теории функций в математике и механике

3. Квалификация (степень) выпускника: Специалист

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

0503 теории функций и геометрии

6. Составители программы: Стенюхин Леонид Витальевич, к. ф.-м. н., доцент

7. Рекомендована: Научно-методическим Советом математического факультета, НМС_протокол №0500-04 от **18.06.2020**.

отметки о продлении вносятся вручную)

8. Учебный год: 2023 - 2024 **Семестр:** 7

9.Цели и задачи учебной дисциплины: ознакомление слушателей с основами современной теории экстремальных задач и их практическая подготовка к дальнейшему использованию методов этой теории при решении прикладных задач и самостоятельной работе в области оптимизации и оптимального управления.

Задачи дисциплины –

- ознакомление слушателей с задачами, принципами и методами теории экстремальных задач;
- приобретение слушателями теоретических знаний, практических умений и навыков в области исследования задач на экстремум;
- оказание консультаций и помощи слушателям в проведении собственных теоретических и практических исследований различных задач оптимизации.
- совершенствование и расширение общенаучной базы.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: Дисциплины по выбору.

Данная дисциплина базируется на материалах курсов «Математика», а именно: «Математический анализ», «Линейная алгебра», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ», «Выпуклый анализ».

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПКВ-1	Способен выявлять, применять, разрабатывать и целенаправленно использовать методы теории функций в задачах математики и механики	ПКВ-1.3	Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в математике, механике и информатике	владеть (иметь навык(и)): основными методами теории экстремальных задач и программными пакетами для их решения
ПКВ-2	Способен проводить исследования по обработке и анализу научной информации и результатов исследований методами теории функций.	ПКВ-2.1	Знает современные методы разработки и реализации моделей, используя теорию функций	знать: основные принципы теории экстремальных задач
		ПКВ-2.2	Умеет разрабатывать математические модели в области естествознания, экономики и управления, а также	уметь: моделировать и решать экстремальные задачи

			реализовывать алгоритмы математических моделей на базе пакетов прикладных программ моделирования	
ПКВ-3	Способен к построению моделей и оптимальному решению теоретических и прикладных задач математики и механики на основе методов теории функций и геометрии	ПКВ-3.1	Знает современные методы разработки и реализации математических моделей	знать: основные принципы теории экстремальных задач
		ПКВ-3.2	Владеет навыками построения моделей прикладных процессов и навыками применения современных инструментальных средств к решению прикладных задач	владеть (иметь навык(и)): основными методами теории экстремальных задач и программными пакетами для их решения

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.(*в соответствии с учебным планом)* **—** 3/108.

Форма промежуточной аттестации*(зачет/экзамен)* зачёт.

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость			
	Всего	По семестрам		
		№ семестра	№ семестра	…
Аудиторные занятия	68	7		
в том числе: лекции	34	7		
практические	34			
лабораторные		7		
Самостоятельная работа	40	7		
Форма промежуточной аттестации *(зачет – 0 час. / экзамен – __час.)*	0	7		
Итого:	108	7		

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
	1. Лекции	
1.1	Условия экстремума в задачах вариационного исчисления	1) Каноническая задача Лагранжа классического вариационного исчисления в понтрягинской форме. Пространства фазовых и управляющих переменных. Слабый и сильный минимум. Производная оператора равенств задачи Лагранжа и замкнутость ее образа. 2) Применение общего правила множителей Лагранжа к задаче Лагранжа КВИ. Обобщенная лемма Дюбуа—Раймона. Уравнение Эйлера—Лагранжа: сопряженное уравнение, условия трансверсальности, условие стационарности по управлению. 3) Задачи, сводящиеся к канонической задаче Лагранжа: задача с интегральным функционалом, с изопериметрическими ограничениями, со старшими производными, задачи на нефиксированном отрезке времени. 4) Простейшая задача КВИ с закрепленными концами. Уравнение Эйлера и его первые интегралы (законы сохранения). Лагранжиан и уравнение Эйлера для системы материальных точек в потенциальном поле. Второй закон Ньютона и закон сохранения энергии.
1.2	Задачи оптимального управления и принцип максимума Понтрягина	Каноническая понтрягинская задача оптимального управления. Формулировка принципа максимума Понтрягина. Функция Понтрягина. Доказательство ПМ для случая свободного правого конца. Игольчатые вариации управления.
1.3	Существование решения в задачах на экстремум	Общая идея решения задач оптимального управления с помощью принципа максимума. Краевая задача принципа максимума. Особые и неособые режимы. Проблема синтеза оптимального управления – построения управления как функции от фазовых переменных (обратная связь).
	2. Практические занятия	
2.1	Условия экстремума в задачах вариационного исчисления	1) Каноническая задача Лагранжа классического вариационного исчисления в понтрягинской форме. Пространства фазовых и управляющих переменных. Слабый и сильный минимум. Производная оператора равенств задачи Лагранжа и замкнутость ее образа. 2) Применение общего правила множителей Лагранжа к задаче Лагранжа КВИ. Обобщенная лемма Дюбуа—Раймона. Уравнение Эйлера—Лагранжа: сопряженное уравнение, условия трансверсальности, условие стационарности по управлению.

		3) Задачи, сводящиеся к канонической задаче Лагранжа: задача с интегральным функционалом, с изопериметрическими ограничениями, со старшими производными, задачи на нефиксированном отрезке времени. 4) Простейшая задача КВИ с закрепленными концами. Уравнение Эйлера и его первые интегралы (законы сохранения). Лагранжиан и уравнение Эйлера для системы материальных точек в потенциальном поле. Второй закон Ньютона и закон сохранения энергии.
2.2	Задачи оптимального управления и принцип максимума Понтрягина	Каноническая понтрягинская задача оптимального управления. Формулировка принципа максимума Понтрягина. Функция Понтрягина. Доказательство ПМ для случая свободного правого конца. Игольчатые вариации управления.
2.3	Существование решения в задачах на экстремум	Общая идея решения задач оптимального управления с помощью принципа максимума. Краевая задача принципа максимума. Особые и неособые режимы. Проблема синтеза оптимального управления – построения управления как функции от фазовых переменных (обратная связь).
3. Лабораторные работы		

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1.	Условия экстремума в задачах вариационного исчисления	10	10		15	35
2.	Задачи оптимального управления и принцип максимума Понтрягина	10	10		10	30
3.	Существование решения в задачах на экстремум	14	14		15	43
	Итого:	34	34		40	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

(рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: работа с конспектами лекций, презентационным материалом, выполнение практических заданий, тестов, заданий текущей аттестации и т.д.)

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины *(список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)*

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М., Наука, 1969.
2.	В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. Оптимальное управление. М., Наука, 1979, Физматлит, 2006.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1.	И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
2.	А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. Теория экстремальных задач. М., Наука, 1974.
3.	В.М. Тихомиров. Рассказы о максимумах и минимумах. М., Наука, 1986, МЦНМО, 2006.

в)информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*****:

№ п/п	Ресурс
1.	Iprbookshop.ru
2.	e.lanbook.com
3.	book.ru

* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

(учебно-методические рекомендации, пособия, задачники, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

№ п/п	Источник
1.	«Оптимальное управление». Коллективная монография кафедры ОПУ мехмата МГУ *(ред. В.М. Тихомиров, Н.П. Осмоловский), М., МЦНМО, 2008.*
2.	А.В. Дмитрук. Об условиях оптимальности в задачах на экстремум с ограничениями – доклад на Математическом кружке МФТИ (май 2013): http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=rus&presentid=6752

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение): (*При реализации дисциплины могут проводиться различные типы лекций (вводная, обзорная и т.д.), семинарские занятия (проблемные, дискуссионные и т.д.), применяться дистанционные образовательные технологии в части освоения лекционного материала, проведения текущей аттестации, самостоятельной работы по дисциплине или отдельным ее разделам и т.д. При применении ЭО и ДОТ необходимо в п.15 в) указать используемые ресурсы (см. пример выше)*

При реализации учебной дисциплины используются информационные электронно-образовательные ресурсы www.liv.vsu.ru и https://e.lanbook.com.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:
специального оборудования не требуется

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Кинематика жидкой среды.	ПКВ-1	ПКВ-1.3	- Практико-ориентированные задания. Контрольная работа
2	Динамика идеальной жидкости	ПКВ-2	ПКВ-2.1 ПКВ-2.2	Практико-ориентированные задания. Контрольная работа
3	Механика вязкой жидкости	ПКВ-3	ПКВ-3.1 ПКВ-3.2	Практико-ориентированные задания
Промежуточная аттестация форма контроля – зачёт				*Перечень вопросов* *Практическое задание*

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

20.1.1 Перечень вопросов к зачету:

1. Основные типы оптимизационных задач и основные теоремы об условиях экстремума;
2. Постановка общей задачи на экстремум с гладкими ограничениями равенства и неравенства и правило множителей Лагранжа в ней;
3. Метод вариаций для вывода условий экстремума;
4. Конус критических вариаций в гладкой задаче и его роль в условиях экстремума;
5. Необходимые и достаточные условия «второго» порядка для локального минимума в гладкой задаче;
6. Задача Лагранжа классического вариационного исчисления и условия экстремума в ней, понятие сильного и слабого минимума, экстремали;
7. Уравнение Эйлера и его первые интегралы (законы сохранения) для задач классического вариационного исчисления;
8. Условия Лежандра и Якоби для знакоопределенности второй вариации в задаче Лагранжа, понятие и роль сопряженной точки;
9. Задача оптимального управления понтрягинского типа и формулировка принципа максимума Понтрягина;
10. Понятие фазовой, управляющей и сопряженной переменной, условий трансверсальности и условия максимума функции Понтрягина;
11. Понятия особых и неособых режимов, краевой задачи принципа максимума, синтеза оптимального управления, игольчатых вариаций управления;
12. Принцип максимума для задач оптимального управления со смешанными ограничениями;
13. Понятие о методе динамического программирования и его связи с принципом максимума;
14. Общая теорема Вейерштрасса о существовании решения в задачах на экстремум;
15. Теорема существования в задаче оптимального управления, выпуклой по управлению;

16. классические примеры задач вариационного исчисления и оптимального управления и их решения.

20.1.2 Перечень практических заданий

Занятие 1. Общая характеристика задач КВИ.
Основные особенности экстремальных задач классического вариационного исчисления. Структура задачи КВИ. Функционалы, ограничения, граничные условия.
Основные виды задач КВИ. Задачи с одним параметром $x(\cdot)\in C_1^1([t_0,t_1])$:
1. Задача Больца без ограничений (постановка задачи)
2. Простейшая (векторная) задача (постановка задачи)
3. Общая задача КВИ с граничными условиями (постановка задачи)
Задачи с двумя параметрами $x(\cdot)\in C_1^1([t_0,t_1]),\ u(\cdot)\in C_1([t_0,t_1])$:
4. Задача Лагранжа (постановка задачи).

Занятие 2. Понятие решения экстремальной задачи КВИ. Понятие функции, допустимой в исходной задаче КВИ. Понятие допустимой экстремали.
Определение слабого и сильного локального экстремума в задаче с одним параметром.
Определение слабого и сильного локального экстремума в задаче с двумя параметрами.
Связь понятий слабого и сильного локального экстремума. Соотношение необходимых условий для слабого и сильного локального экстремума. Соотношение достаточных условий для слабого и сильного локального экстремума.

Занятие 3. Методы исследования задач КВИ.
Общая схема решения экстремальной задачи КВИ. Два основных этапа исследования:
1) Составление общей системы соотношений, включающей необходимые условия и ограничения исходной задачи. Исследование полученной системы и нахождение допустимых экстремалей.
2) Исследование найденных допустимых экстремалей и нахождение решения задачи.
Описание возможных методов исследования на втором этапе решения экстремальной задачи КВИ.
1) Метод непосредственной проверки определения локального или глобального экстремума
2) Проверка достаточных условий экстремума
3) Использование теорем существования и единственности решения задачи
Подробное описание основного аналитического метода исследования – метода непосредственной проверки. Теоретическое обоснование данного метода.
Особая проблема: доказательство того факта, что найденная функция (допустимая экстремаль) не доставляет локального экстремума и, таким образом, не является решением исходной задачи.

Занятие 4.
Классическое вариационное исчисление. Задача Больца без ограничений.
Теорема о необходимых условиях экстремума в данной задаче. (формулировка)
Анализ системы необходимых условий экстремума в задаче Больца (уравнение Эйлера, условия трансверсальности).
Алгоритмический смысл необходимых условий экстремума в задаче Больца без ограничений.
Задача 1. Постановка задачи:

$$I(x(\cdot))=\int_0^{T_0}\left[\dot{x}^2(t)-x(t)\right]dt+x^2(1)\to\inf$$

$$x(\cdot)\in C_1^1([0,1])$$

Необходимые условия экстремума в задаче - уравнение Эйлера и условия трансверсальности (подробный вывод).

Занятие 5. Классическое вариационное исчисление. Задача Больца без ограничений (завершение анализа).

Исследование необходимых условий экстремума в задаче 1 и нахождение единственной допустимой экстремали.

Единственная допустимая экстремаль $x_*(t)=\frac{1}{4}\left(3-t^2\right)$. Доказательство того, что $x_*(t)$ представляет собой слабый глобальный (абсолютный) минимум методом непосредственной проверки.

Занятие 6.

Классическое вариационное исчисление. Простейшая задача.

<u>*Задача 3.*</u> Постановка задачи:

$$I(x(\cdot))=\int_0^1\left[x(t)-\dot{x}^2(t)\right]dt\to\inf \quad (1)$$

$$x(0)=0,\ x(1)=0 \quad (2$$

$$x(\cdot)\in C^1([0,1])$$

Общая система соотношений для определения допустимой экстремали: уравнения Эйлера и граничные условия (2) исходной задачи.

Единственная допустимая экстремаль $x_*(t)=\dfrac{1}{4}\left(t-t^2\right)$.

Методом непосредственной проверки устанавливается, что для любой допустимой функции $x(\cdot)=x_*(\cdot)+h(\cdot),\ h(\cdot)\in C^1[0,1]$, *h(0)=0, h(1)=0* выполняется соотношение $I(x(\cdot))\le I(x_*(\cdot))$.

Таким образом, функция $x_*(\cdot)$ доставляет глобальный максимум в задаче (1)-(2).

Построение последовательности допустимых функций $x_n(t)=nt(t-1)$, n=1,2,..., для которой $I(x_n(\cdot))\to -\infty$.

Следовательно, функционал $I(x(\cdot))$ не ограничен снизу на множестве допустимых функций, и решения задачи (1)-(2) на минимум не существует.

Занятие 7.

Классическое вариационное исчисление. Общая задача КВИ с граничными условиями.

Теоретические сведения.

Теорема о необходимых условиях экстремума в данной задаче (формулировка).

Система соотношений в общей задаче с граничными условиями состоящая из необходимых условий и ограничений исходной задачи.

Закономерности, связанные с условиями трансверсальности. Разрешимость общей системы соотношений и нахождение всех неизвестных параметров.

Занятие 8. Классическое вариационное исчисление. Общая задача КВИ с граничными условиями.

<u>*Задача 4.*</u> Постановка задачи:

$$I(x(\cdot))=\int_0^{T_0}\left[x(t)-\dot{x}^2(t)\right]dt\to extr \qquad (1)$$

$$x(0)=0 \qquad (2)$$

$$x(\cdot)\in C^1([0,T_0])$$

Для решения используется методика исследования общей задачи с граничными условиями. Необходимые условия экстремума - уравнение Эйлера и условия трансверсальности. Подробный анализ условий трансверсальности: условие трансверсальности в точке $t_0=0$ неинформативно.

Единственная допустимая экстремаль $x_*(t)=-\frac{1}{4}t^2+\frac{T_0}{2}t$. Методом непосредственной проверки устанавливается, что для любой допустимой функции $x(\cdot)=x_*(\cdot)+h(\cdot)$, $h(0)=0$ выполняется условие
$I(x(\cdot))<I(x_*(\cdot))$, то есть функция $x_*(\cdot)$ доставляет абсолютный максимум в исходной задаче (1) – (2).

Занятие 9. Необходимые условия второго порядка и достаточные условия экстремума в простейшей задаче КВИ. Теоретические сведения.

Вычисление вспомогательных характеристик в простейшей задаче КВИ. Условие Лежандра (стандартное и усиленное). Уравнение Якоби. Фундаментальное решение уравнения Якоби и понятие сопряженной точки. Условие Якоби (стандартное и усиленное).

Условие квазирегулярности интегранта в простейшей задаче КВИ.

Теоремы о необходимых условиях слабого минимума и достаточных условиях слабого минимума в простейшей задаче КВИ

$$I(x(\cdot))=\int_0^{T_0}\left[x(t)-\dot{x}^2(t)\right]dt\to extr \qquad (1)$$

$$x(0)=0 \qquad (2)$$

$$x(\cdot)\in C^1([0,T_0])$$

Занятие 10. Задача Лагранжа. Теоретические сведения.

Общая постановка задачи Лагранжа. Аналитические свойства функций, определяющих задачу. Вспомогательные объекты: лагранжиан и функция Лагранжа.

Теорема о необходимых условиях экстремума в задаче Лагранжа. Представление необходимых условий в форме, удобной для аналитического исследования.

Составление общей системы соотношений для определения неизвестных параметров, состоящей из необходимых условий и ограничений исходной задачи. Методические рекомендации по исследованию полученной системы и нахождению допустимой экстремали.

Занятие 11.

Задача Лагранжа. Пример исследования.

<u>*Задача 7.*</u> Постановка задачи:

$$I(x(\cdot),u(\cdot))=\int_0^{\frac{\pi}{2}}u^2(t)\,dt\to inf \qquad (1)$$

$$\ddot{x}(t)+x(t)=u(t) \qquad (2)$$

$$x(0)=0,\ x(0)=0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right)= \qquad (3)$$

$$x(\cdot)\in C_2^1\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

Приведение задачи (1)-(3) к каноническому виду задачи Лагранжа.

Преобразование задачи (1) – (3) при помощи замены: $x=x_1,\ \dot{x}=x_2$. Задача (1) – (3) в канонической форме принимает вид

$$I(x(\cdot),u(\cdot))=\int_0^{\frac{\pi}{2}}u^2(t)\,dt\to inf \qquad (4)$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=u-x_1\end{cases} \qquad (5)$$

$$\begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0; \end{cases} \quad x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0 \qquad (6)$$

Вычисление вспомогательных характеристик и вывод необходимых условий экстремума: сопряженного уравнения, условий трансверсальности и условий стационарности лагранжиана по параметру u. Составление общей системы соотношений для определения неизвестных параметров, состоящей из необходимых условий и ограничений исходной задачи.

Завершение анализа задачи Лагранжа, сформулированной на предыдущем занятии (задача 7).

Исследование и определение единственной допустимой экстремали $x_*(t)=\frac{2}{\pi}t\sin t$;

$u_*(t)=\frac{4}{\pi}\cos t$.

Непосредственная проверка того, что пара функций $(x_*(t), u_*(t))$ доставляет глобальный слабый минимум в исходной задаче.

Занятие 12.

Задача оптимального распределения ресурсов (классическая экономическая проблема). Математическая постановка задачи и её экономическое содержание. Решение задачи на основе метода динамического программирования.

Определение (формальное) функции Беллмана данной задачи и её особенности. Уравнение Беллмана как основное теоретическое соотношение. Два способа вывода уравнение Беллмана: качественный вывод на основе принципа Беллмана и аналитический вывод на основе свойств экстремумов функций.

Занятие 13.

Алгоритм решения задачи оптимального распределения ресурсов и его численная реализация.

Система функциональных уравнений Беллмана как теоретическая основа алгоритма решения задачи. Дискретизация задачи. Дискретный аналог уравнений Беллмана.

Первый этап реализации алгоритма (подготовительный). Создание вспомогательных массивов данных значений функции Беллмана и значений параметров управления, на которых достигается равенство в уравнениях Беллмана.

Второй этап реализации алгоритма (завершающий). Определение оптимальных значений параметров управления – объемов распределяемых ресурсов.

Занятие 14.

Доказательство оптимальности решения задачи оптимального распределения ресурсов, полученного методом динамического программирования.

Занятие 15.

Задача об оптимальном быстродействии (часть 1).

Описание физической модели системы (движущаяся управляемая материальная точка). Физические законы описания системы.

Математическая постановка задачи оптимального управления.

$$I(x(\cdot),u(\cdot)) = T = \int_0^T dt \to \inf \qquad (1)$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix} = a_0 \qquad (3)$$

$$x(T) = \begin{pmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

$$u(t) \in U = \{u \in R : |u| \le 1\} \qquad (5)$$

Необходимые условия экстремума: сопряженное уравнение, условие максимума функции Понтрягина. Общая структура оптимальных уравнений $u_*(t)$. Общий вид фазовых траекторий при управлении, удовлетворяющих условиям принципа максимума.

Занятие 16.
Задача об оптимальном быстродействии (часть 2).
Аналитическое исследование траекторий управляемого процесса. Определение неизвестных параметров оптимального процесса в зависимости от начальных условий.
Доказательство оптимальности управляемого процесса $\{x_*(t), u_*(t); T_*\}$, удовлетворяющего условиям принципа максимума в задаче об оптимальном быстродействии. Метод доказательства: использование вспомогательной функции $\psi(t) = -x_1(t) + x_2(t)(t-\tau)$.

20.1.3 Тестовые задания

Не предусматривается

20.1.4 Перечень заданий для контрольных работ

Задача 1. Решить задачу Больца.

$$I(x(\cdot)) = \int_0^1 [\dot{x}^2(t) + x^2(t)]dt - 2sh1\; x(1) \to inf$$

1) Найти допустимую экстремаль.
2) Провести исследование методом непосредственной проверки и доказать, что найденная экстремаль доставляет решение в исходной задаче.

Задача 2. Решить простейшую задачу КВИ.

$$I(x(\cdot)) = \int_0^1 [\dot{x}^2(t) + tx(t)]dt \to inf,\; x(0) = 0, x(1) = 1$$

1) Найти допустимую экстремаль.
2) Провести исследование методом непосредственной проверки и доказать, что найденная экстремаль доставляет решение в исходной задаче.

3) Применить теорему о достаточных условиях экстремума в простейшей задаче КВИ и на её основании ещё раз доказать, что найденная экстремаль доставляет решение в исходной задаче.

Задача 3*. Исследовать задачу Больца.

$$I(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2(t)\,dt + 4x^2(0) - 5x^2(1) \to inf$$

1) Найти допустимую экстремаль.
2) Доказать, что данная экстремаль не является решением, т.е. не доставляет локального экстремума в исходной задаче.
3) Доказать, что решения исходной задачи не существует, и целевой функционал $I(x(\cdot))$ не является ограниченным снизу.

"

Вариант №2

Задача 1. Решить задачу Больца.

$$I(x(\cdot)) = \int_0^{\pi} [\dot{x}^2(t) + x^2(t) - 4\sin t\, x(t)]dt + 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi) \to inf$$

1) Найти допустимую экстремаль.
2) Провести исследование методом непосредственной проверки и доказать, что найденная экстремаль доставляет решение в исходной задаче.

Задача 2. Решить простейшую задачу КВИ.

$$I(x(\cdot)) = \int_0^1 [t^2 x(t) - x^2(t)]dt \to sup,\ x(0) = 0, x(1) = 0$$

1) Найти допустимую экстремаль.
2) Провести исследование методом непосредственной проверки и доказать, что найденная экстремаль доставляет решение в исходной задаче.
3) Применить теорему о достаточных условиях экстремума в простейшей задаче КВИ и на её основании ещё раз доказать, что найденная экстремаль доставляет решение в исходной задаче.

Задача 3*. Исследовать задачу Больца.

$$I(x(\cdot)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\dot{x}^2(t) - x^2(t)]dt + x^2(0) - x^2(\tfrac{\pi}{2}) + 4x(\tfrac{\pi}{2}) \to inf$$

1) Найти допустимую экстремаль.
2) Доказать, что данная экстремаль не является решением, т.е. не доставляет локального экстремума в исходной задаче.
3) Доказать, что решения исходной задачи не существует, и целевой функционал $I(x(\cdot))$ не является ограниченным снизу.

20.1.5 Темы курсовых работ

Нет курсовых работ.

20.1.6 Темы рефератов

Нет рефератов

19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущая аттестация проводится в форме *устного опроса (индивидуальный опрос).* Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и/или практическое(ие) задание(я), позволяющее(ие) оценить степень сформированности умений и(или) навыков, и(или) опыт деятельности *(указываете реальную структуру)*.

При оценивании используются качественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.